

УДК 519.254:519.600:519.674

Ю.М. Архангельська, Ю.В. Самарець

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

АПРОКСИМАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ МАРКОВСЬКИМИ У СИСТЕМІ ГІДРОХІМІЧНОГО МОНІТОРИНГУ

На підставі методів теорії марковських процесів, розроблено математичну модель поведінки концентрації гідрохімічних показників питної води.

Ключові слова: *гідрохімічний моніторинг, математична модель, питна вода.*

На основе методов теории марковских процессов разработана математическая модель поведения концентрации гидрохимических показателей питьевой воды.

Ключевые слова: *гидрохимический мониторинг, математическая модель, питьевая вода.*

On the basis of method of theory of markov processes, the mathematical model of conduct of concentration of hydrochemical indexes of drinking-water is developed.

Key words: *territorial hydrochemical monitoring, mathematical model, drinking-water.*

Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливими науковими дослідженнями. В Україні, зокрема на території Придніпров'я, в умовах розвиненої промислової та сільськогосподарської діяльності постає завдання своєчасного та якісного аналізу стану питної води (ПВ) техногенно навантажених регіонів. Одним з основних завдань під час проведення аналізу даних гідрохімічного моніторингу питної води (ГХМ ПВ) та оцінки факторів навколишнього середовища для запобігання їх шкідливому впливу на стан здоров'я населення є аналіз зміни гідрохімічних показників (ГХП) у певних межах. Вирішення поставленого завдання бачиться у використанні методів математичного моделювання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій, в яких розпочато вирішення даної проблеми. У науковій літературі багато

теоретичних обґрунтувань і практичних підходів до побудови аналітичних моделей екосистем. Найбільш адекватним математичним апаратом побудови і аналізу аналітичних моделей є теорія диференціальних рівнянь [1] та теорія бифуркацій [2; 3]. Також особливе місце займають стохастичні моделі та імітаційні моделі екосистем [4 – 13]. За своєю природою концентрація ГХП ПВ є стохастичним неперервним процесом. З іншого боку, концентрації речовин змінюються у певних межах, перехід між якими відбувається у випадкові моменти часу. В зв'язку з вказаними властивостями пропонується аналізувати поведінку концентрації показників ПВ за моделями з класу марковських. Застосування методів теорії марковських процесів знайшло себе у розв'язанні задач екологічного моніторингу, однак відсоток робіт, де марковські моделі використовуються в задачах ГХМ, дуже малий. Основу таких моделей було подано у [6].

У зв'язку з цим постає задача в необхідності розробки математичної моделі поведінки концентрації ГХП ПВ та її аналіз.

Постановка задачі. Задача оцінки реакції гідрохімічного середовища на техногенне навантаження з ієрархічним діленням його компонентів, ймовірності знаходження гідрохімічних показників питної води (ГХП ПВ) у заданих станах та ризику знаходження стану ПВ поза зоною норми з виділенням ГХП ПВ та аналізом їх впливу на стан ПВ може бути вирішена за допомогою теорії марковських процесів, розбиттям множини $g(t)$ реалізацій випадкового неперервного процесу $g(t) = \{g_t, t \in T\} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ на n' підмножин: $g \in k \Leftrightarrow g \in (g_k^*, g_{k+1}^*]$, де g_k^* – елементи розбиття $\Delta_h = \{g_k^*, k = 1, 2, \dots, n' + 1\}$; t – дата відбору проб води; g_t – значення концентрації гідрохімічної речовини в t -й момент часу (рис.1).

Основний матеріал. При відстеженні накопичення хімічних елементів у ПВ було виділено три стани:

$$\begin{cases} 0: g(t) < \PhiЗК, \\ 1: \PhiЗК \leq g(t) \leq ГДК, \\ 2: g(t) > ГДК. \end{cases}$$

де $\PhiЗК$ – фонове значення концентрації гідрохімічної речовини, $ГДК$ – гранично-допустима концентрація гідрохімічної речовини.

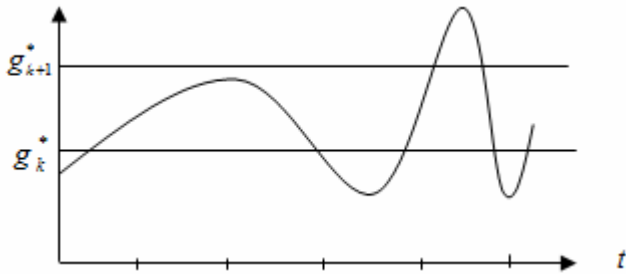


Рис.1. Реалізація неперервного випадкового процесу у вигляді дискретно-неперервного процесу

Спеціалістами санітарно-епідеміологічної станції (СЕС) три стани було охарактеризовано як: «0» – фоновий стан води; «1» – вода для побутово-питних нужд; «2» – вода для побутових нужд.

Нехай $P_k(t)$ – ймовірність знаходження процесу в стані k , тоді, виходячи з природи неперервного випадкового гідрохімічного процесу $g(t) = \{g_t, t \in T\} = (g_1, g_2, \dots, g_M)$, побудовано математичну модель процесу поведінки концентрації хімічних показників, граф якої надано на рис.2.

Відповідно заданих станів проведена оцінка інтенсивностей потоку вимог протягом часу Δt для знаходження вірогідних кусково-сталих інтенсивностей згідно [6]. Оцінка інтенсивностей пов'язана з процедурою перевірки гіпотези $H_0: \lambda_i = \lambda_{i+1}$ та обчисленням статистичної характеристики

$$t = \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{\sqrt{(n_i - 1)\lambda_{i+1}^2 + (n_{i+1} - 1)\lambda_i^2}} \sqrt{\frac{n_i n_{i+1} (n_i + n_{i+1} - 2)}{n_i + n_{i+1}}},$$

яка має t – розподіл з кількістю степенів вільності $\nu = n_i + n_{i+1} - 2$.

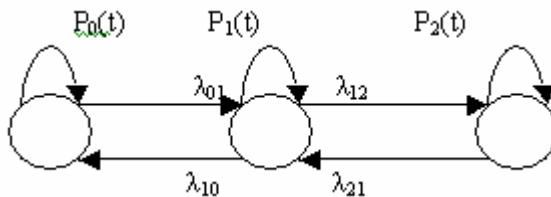


Рис.2. Граф переходів між станами

Якщо $|t| \leq t_{\alpha/2, \nu}$, то гіпотеза H_0 є вірною та здійснюється перерахування значення λ_i .

$$\lambda_i = \frac{n_i + n_{i+1}}{(N - N_i)(\Delta t_i + \Delta t_{i+1})}, \text{ де } N_i = \sum_{j=1}^{i+1} n_j.$$

За результатом оцінки інтенсивностей потоків вимог відповідно заданих зон виділено $\lambda_{ij} = \text{const}, i, j = \overline{0, 2}$.

Для визначення ймовірностей перебування в різних зонах при $\lambda_{ij} = \text{const}; i, j = \overline{0, 2}$ розв'язано систему диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}P_0(t) + \lambda_{10}P_1(t), \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\lambda_{10} + \lambda_{12})P_1(t) + \lambda_{01}P_0(t), \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \lambda_{12}P_1(t) - \lambda_{21}P_2(t), \\ P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = 1, \\ P_0(t_0) = 1, P_1(t_0) = 0, P_2(t_0) = 0 \end{cases}$$

та отримано розв'язок для динамічного та стаціонарного режимів.

Розв'язком стаціонарного режиму є:

$$P_0 = \frac{\lambda_{21}\lambda_{10}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}}, P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0, P_2 = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} P_0.$$

Для знаходження розв'язку в динамічному режимі застосовувалось перетворення Лапласа. У цьому випадку розв'язок має вигляд:

$$\begin{cases} P_0(t) = \frac{\lambda_{21}\lambda_{10}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_1)(\lambda_{21} + S_1) - \lambda_{12}\lambda_{21}}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t)} + \\ + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_2)(\lambda_{21} + S_2) - \lambda_{12}\lambda_{21}}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t)}, \\ P_1(t) = \frac{\lambda_{01}\lambda_{21}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}(\lambda_{21} + S_1)}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t)} + \frac{\lambda_{01}(\lambda_{21} + S_2)}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t)}, \\ P_2(t) = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t)} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t)}, \end{cases}$$

де $\Delta = S^3 + S^2(\lambda_{12} + \lambda_{01} + \lambda_{21} + \lambda_{10}) + S(\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21})$,

$$\Delta^1 = 3S^2 + 2S(\lambda_{12} + \lambda_{01} + \lambda_{21} + \lambda_{10}) + (\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}),$$

S_1, S_2 – корені рівняння Δ .

Наступним кроком аналізу марківської системи є визначення моменту, в який процес переходить з динамічного режиму в стаціонарний. Для цього, задаючись похибкою, знаходять границі стаціонарності щодо зон:

$$P_0^{n,\epsilon} = P_0 \mp \alpha/2 P_0,$$

$$P_1^{n,\epsilon} = P_1 \mp \alpha/2 P_1,$$

$$P_2^{n,\epsilon} = P_2 \mp \alpha/2 P_2.$$

Для знаходження моментів t_0, t_1, t_2 з яких починається стаціонарний режим стосовно $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$, розв'язано рівняння вигляду:

$$P_0^\epsilon = \frac{\lambda_{21}\lambda_{10}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_1)(\lambda_{21} + S_1) - \lambda_{12}\lambda_{21}}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t_0)} + \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{10} + S_2)(\lambda_{21} + S_2) - \lambda_{12}\lambda_{21}}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t_0)},$$

$$P_1^n = \frac{\lambda_{01}\lambda_{21}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}(\lambda_{21} + S_1)}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t_0)} + \frac{\lambda_{01}(\lambda_{21} + S_2)}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t_0)},$$

$$P_2^n = \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\lambda_{01}\lambda_{21} + \lambda_{01}\lambda_{12} + \lambda_{10}\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\Delta^1(S_1)} \exp^{(S_1 t_0)} + \frac{\lambda_{01}\lambda_{12}}{\Delta^1(S_2)} \exp^{(S_2 t_0)}.$$

Результати досліджень. Апробація розробленої моделі поведінки концентрації ГХП ПВ виконана за даними гідрохімічного моніторингу питної води Дніпропетровського району Дніпропетровської області за 14 точками водозабору на період з 2003 – 2010 рр:

- лівобережна частина Дніпропетровського району: № 1, 2, 3 с. Чумаки; смт. Ювілейне; № 1, 2 с. Партизанське; с. В. Маївка; с. Степне; с. Зоря; м. Підгороднє, вул. Робоча (№1); м. Підгороднє, вул. Енергетиків (№2); м. Підгороднє, вул. Геологів (№3);
- правобережна частина Дніпропетровського району: с. Новомиколаївка, с. Сурсько-Литовське.

Оцінка ймовірності знаходження ГХП ПВ у заданих станах та ризику знаходження стану ПВ поза зоною норми проведено на прикладі показників ПВ, що подано у табл. 1.

Таблиця 1

Нормативні значення основних гідрохімічних показників

Назва показника питної води	Одиниця виміру	ГДК	Фонова концентрація
Сухий залишок	мл/дм ³	1000	650
NH ₄ ⁺	мл/дм ³	2	0,3
NO ₂ ⁻	мл/дм ³	3,3	0,8
NO ₃ ⁻	мл/дм ³	45	2
Fe	мл/дм ³	0,3	0,1
Окисність	мл/дм ³	4	2,6

За рахунок великої кількості обчислень результати досліджень представлено на прикладі с. Чумаки водозабір № 1 на прикладі ГХП ПВ Fe період збору інформації з червня 2003 року по березень 2009 року.

Була отримана оцінка сталих функцій інтенсивностей для ГХП ПВ Fe та інших ГХП ПВ за водозабором №1 с. Чумаки (табл. 2).

Таблиця 2

Інтенсивності переходів між станами

Гідрохімічний показник ПВ	Інтенсивності (1/міс.)			
	λ_{01}	λ_{12}	λ_{21}	λ_{10}
Fe	0,2899	0,2041	0,5813	0,1454
Cu *	–	–	–	–
NH ₄ ⁺	0,1928	0,2384	0,4798	0,1790
NO ₃ ⁻	0,0159	0	0	0,0154
NO ₂ ⁻ *	–	–	–	–
Загальна жорсткість	0,1819	0,1264	0,1416	0,3095

Закінчення табл. 2

Окисність	0,2312	0,1214	0,1166	0,2244
Сухий залишок*	–	–	–	–

«*» – гідрохімічний показник знаходиться в одному стані.

Результатом динамічного та стаціонарних режимів є функції знаходження концентрації ГХП ПВ у різних станах. Остання функція $P_2(t)$ уявляє собою функцію ризику знаходження ГХП ПВ поза зоною норми:

$$\begin{cases} P_0(t) = 0,3534 + 0,5728 \exp^{(-0,4155t)} + 0,0739 \exp^{(-0,6816t)}, \\ P_1(t) = 0,5018 - 0,29965 \exp^{(-0,4155t)} - 0,20192 \exp^{(-0,6816t)}, \\ P_2(t) = 0,1448 - 0,27314 \exp^{(-0,4155t)} + 0,13792 \exp^{(-0,6816t)}. \end{cases}$$

Для стаціонарного режиму: $P_0 = 0,3534$, $P_1 = 0,5018$, $P_2 = 0,1448$.

Аналогічним чином знайдено функції знаходження концентрації ГХП ПВ у різних станах для інших ГХП ПВ для динамічного та стаціонарного режимів. Наступним кроком аналізу марковської системи є визначення моменту, в який процес переходить з динамічного режиму до стаціонарного. Так, задавшись похибкою $\alpha = 0.05$, знайдено границі стаціонарності щодо станів для кожного з ГХП ПВ. Для знаходження моментів t_0, t_1, t_2 , з яких починається стаціонарний режим для Fe стосовно $P_0(t)$, $P_1(t)$, $P_2(t)$, розв'язано рівняння вигляду:

$$\begin{cases} P^e_0(t) = 0,3534 + 0,5728 \exp^{(-0,4155t)} + 0,0739 \exp^{(-0,6816t)}, \\ P^e_1(t) = 0,5018 - 0,29965 \exp^{(-0,4155t)} - 0,20192 \exp^{(-0,6816t)}, \\ P^e_2(t) = 0,1448 - 0,27314 \exp^{(-0,4155t)} + 0,13792 \exp^{(-0,6816t)}. \end{cases}$$

Для хімічного елемента Fe, t_0, t_1, t_2 , відповідно дорівнюють $t_0 = 8,8$ місяців, $t_1 = 6,4$ місяців, $t_2 = 9,14$ місяців. У результаті проведеної апроксимації можна зробити висновок, що час переходу системи до стаціонарного режиму становить 9,14 місяців. Аналогічним чином знайдено час переходу до стаціонарного режиму за іншими ТГХМ ПВ Дніпропетровського району. За даними ГХМ ПВ отримано, що система переходить у стаціонарний режим, час якого

склав у середньому біля 6 років та при похибці $\alpha=0.05$ відбувся на початку 2008 року.

На рис. 3 представлено ймовірність знаходження ГХП ПВ у «0»-му, «1»-му станах та функція ризику знаходження ГХП ПВ поза зоною норми («2»-й стан) у стаціонарному режимі для водозабору № 1 с. Чумаки.

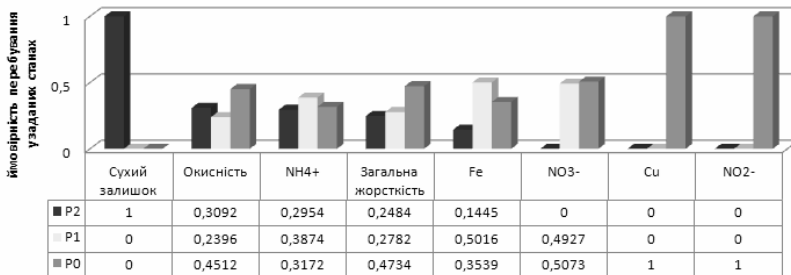


Рис. 3. Ймовірності знаходження ГХП ПВ у заданих станах водозабору №1 с. Чумаки

Висновки. Отримані ймовірності та функція ризику як для динамічного, так і для стаціонарного режимів за математичної моделлю поведінки концентрації ГХП ПВ дозволили виявити речовини, що мають найбільший вплив на стан ПВ та зробити висновок щодо рекомендацій по зменшенню техногенного навантаження за вказаним показниками. Так, речовина сухий залишок на період дослідження знаходиться завжди поза зоною норми ПВ та у першу чергу потребує контролю. Речовини, які під впливом техногенного навантаження перейшли з фонового стану і можуть знаходитись у стані перевищення ГДК за водозабором № 1 с. Чумаки є: окисність (31 %), NH_4^+ (30 %), загальна жорсткість (25 %), Fe (14 %). Хоча NO_3^- і знаходиться у стані норми відносно ГДК речовини у ПВ, його поведінку слід контролювати, тому що вказаний ГХП ПВ схильний до впливу техногенного навантаження. Речовини NO_2^- та Cu за період дослідження залишились у фоновому стані.

У подальшому ймовірності знаходження ГХП ПВ у заданих станах, що отримані за математичною моделлю будуть використані у технології оцінки техногенного впливу на стан підземних питних вод.

Бібліографічні посилання

1. **Эрроусмит Д.** Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями / Д. Эрроусмит, К. Плейс – М., 1986. – 243 с.
2. **Свирижев Ю. М.** Вито Вольтерра и современная математическая экология / Ю. М. Свирижев, В. Вольтерра // Математическая теория борьбы за существование. – М., 1976. – С. 245–286.
3. **Свирижев Ю. М.** Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии / Ю. М. Свирижев – М., 1987. – 368 с.
4. **Винберг Г.Г.** Математическая модель водной экосистемы. / Г.Г. Винберг, С.И. Анисимов // Фотосинтезирующие системы высокой продуктивности. – М., 1966. С. 213 – 223.
5. **Абросов Н.С.** Экологические и генетические закономерности сосуществования и коэволюции видов. / Н.С. Абросов, А.Г. Боголюбов – Новосибирск, 1988. – 333 с.
6. **Байбуз О.Г.** Оперативний аналіз в системах моніторингу. / О.Г. Байбуз, О.П. Приставка, С.В. Земляна – Д., 2005. – 92 с.
7. **Базыкин А.Д.** Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин – М., 1985. – 180 с.
8. **Крестин С.В.** Об одном механизме "цветения воды" в водохранилище равнинного типа / С.В. Крестин, Г.С. Розенберг // Биофизика. – 1996. – Т. 41. Вып. 3. – С. 650–654.
9. **Крестин С.В.** Двухмерная модель "цветения воды" в водохранилище равнинного типа / С.В. Крестин, Г.С. Розенберг – Изв. СамНЦ РАН. – 2002. – Т. 4, № 2. – С. 276–279.
10. **Розенберг Г.С.** Модели в фитоценологии. / Г.С. Розенберг – М., 1984. – 256 с.
11. **Федоров В.Д.** Экология / В.Д. Федоров, Т.Г. Гильманов – М., 1980. – 464 с.
12. **Флейшман Б.С.** Системные методы в экологии / Б.С. Флейшман // Статистические методы анализа почв, растительности и их связи. – Уфа, 1978. – С. 7–10.
13. **Горстко А.Б.** Имитационная система “Азовское море” – инструмент анализа и прогнозирования / А.Б. Горстко, Л.В. Эпштейн // Математическое моделирование водных экологических систем. – Иркутск, 1978. С. 47–58.

Надійшла до редколегії 20.09.2012