УДК 004.02:004.67:51.7

Л. М. Божуха

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ГРАФОВІ СХЕМИ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Актуальним є питання знаходження взаємозв'язків неперервної моделі системи та дискретного представлення архітектури програмного забезпечення. Виникає питання оберненої задачі – прогнозування поведінки та масштабування дискретних процесів, представлення дискретної моделі у вигляді неперервної. У роботі наведено результати найпростішого представлення результатів роботи методу послідовних наближень при введенні бінарного відношення порядку. Наведено результати роботи методу представлення даних різницевого рівняння в термінах дискретної математики. Проведено аналіз методу послідовних наближень у матричному та графічному способах. Введене бінарне відношення між елементами привело до двох варіантів схем пошуку розв'язку трансцендентного рівняння. Питання про існування розв'язку та збіжності ітераційного процесу не розглядалося.

Ключові слова: *бінарне відношення, властивості відношення, метод послідовних наближень*.

Актуальным является вопрос нахождения взаимосвязей непрерывной модели системы и дискретного представления архитектуры программного обеспечения. Возникает вопрос обратной задачи – прогнозирование поведения и масштабирования дискретных процессов, представления дискретной модели в виде непрерывной. В работе приведены результаты простейшего представления результатов работы метода последовательных приближений при введении бинарного отношения порядка. Приведены результаты работы метода визуализации данных разностного уравнения в терминах дискретной математики. Проведен анализ метода последовательных приближений в матричном и графическом способах. Введенное бинарное отношение между элементами привело к двум вариантам схем поиска решения трансцендентного уравнения. Вопрос о существования решения и сходимости итерационного процесса не рассматривалось.

Ключевые слова: *бинарное отношение, свойства отношения, метод последовательных приближений*.

An urgent issue is the question of finding a connection between a continuous system model and a discrete representation of software

architecture. The question arises about the inverse problem - predicting the behavior and scaling of discrete processes, representing the discrete model as continuous. Difference equations reflect one of the properties of the surrounding world – its discreteness. Difference equations are mainly studied to understand nonlinear phenomena and processes occurring in systems of a very different nature. The previously discovered phenomenon in one-dimensional dynamics associated with the ratio of the lengths of the orbits of periodic points was continued in the question of the existence of a mapping with orbits of a certain length with a simple scheme for constructing examples based on the introduced definition of order. The problematic of the presented results can be considered the generalization of the results of the work on binary relations. The complexity of this approach is the construction of a method for representing the data of the difference equation when determining the order relation in terms of discrete mathematics. The use of numerical methods to find an approximate solution to a first-order differential equation leads to a general difference equation. Depending on the properties of the function and the choice of the initial conditions, the iterative process of finding the roots of the transcendental equation can be graphically represented on the coordinate plane in four main schemes. The aim of the work is to compare the methods for specifying a binary relation with the difference scheme of a first-order differential equation, to analyze the properties and degree of the corresponding binary relation. The general idea of constructing a transformation scheme is presented in the form of a chain of states of the corresponding system. When the degree of the introduced binary relation is found on a converging iterative process, the properties are preserved, the matrix of relationships is transformed into a matrix with only one single element. When studying a divergent iterative process, the connections between vertices that correspond to an odd numbering disappear. The article shows the results of the simplest representation of the method of successive approximations with the introduction of a binary order relation. The question of the existence of a solution and the convergence of the iterative process is not considered. Sequential and circular schemes of the iterative process are constructed using examples of binary trees (search trees, AVL trees, and red-black trees). The use of the proposed modification of the method allows us to expand the range of existence of options for representing an iterative scheme for calculating the solution of a first-order differential equation in graphical and matrix methods with the introduction of a binary relation.

Keywords: *binary relation, relation properties, method of successive approximations*.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Диференціальні рівняння на графах привертають увагу багатьох дослідників. При використанні сучасних технологій допускається структурна формалізація у вигляді одновимірних множин, які взаємодіють через вузли. Вивчення ітерацій відображень $f : R^m \to R^m$, $m > 0$ зводиться до різницевих рівнянь $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_n \in R$, $n \in N$. Різницеві рівняння відображають одну з властивостей навколишнього світу – його дискретність. Різницеві рівняння в більшій частині досліджуються для розуміння нелінійних явищ і процесів, які відбуваються в системах різної природи.

В роботі [2] виявлено явище в одновимірній динаміці, пов'язане із взаємовідносинами довжин орбіт періодичних точок. У роботі [3] продовжено тематику існування відображення з орбітами певної довжини і наведено просту схему побудови прикладів, яка основана на введеному визначенні порядку.

Процеси можуть описуватися класичними математичними моделями, реалізованими на деревах або на графах. Актуальним залишається питання знаходження взаємозв'язків дискретного представлення архітектури програмного забезпечення через неперервну модель системи та існування такого рішення. Виникає питання оберненої задачі – прогнозування поведінки та масштабування дискретних процесів, представлення дискретної моделі у вигляді неперервної.

Проблематикою надалі представлених результатів можна вважати узагальнення результатів роботи [2] на бінарні відношення, їх аналіз у матричному та графічному способах задання. Проблемою побудови методу представлення даних різницевого рівняння є формування відношення порядку в термінах дискретної математики.

Постановка проблеми. Проблематикою роботи є співставлення способів задання бінарного відношення з різницевою схемою диференціального рівняння першого порядку. При введенні бінарного відношення проаналізувати його властивості та ступінь.

Метою даної роботи є представлення ітераційної схеми обчислення розв'язку диференціального рівняння першого порядку у графічному та матричному способах представлення бінарного відношення порядку.

Основний матеріал дослідження. Застосування чисельних методів при знаходженні наближеного розв'язку диференціального рівняння першого порядку приводить до різницевого рівняння загального вигляду:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (1)$$

Залежно від властивостей функції $y = f(x)$ та обрання початкових умов, ітераційний процес знаходження x_{n+1} $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ можна графічно представити на координатній площині в чотирьох основних схемах (рис. 1).

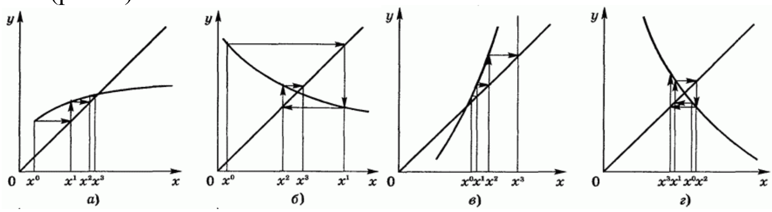


Рисунок 1 – Ітераційний процес (а, б – процес збігається, в, г – процес розбігається)

Загальна ідея побудови схеми перетворень представлена у вигляді ланцюга стану відповідної системи. Розташування x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ на прямій описується тільки двома способами (рис. 2).

а)

б)

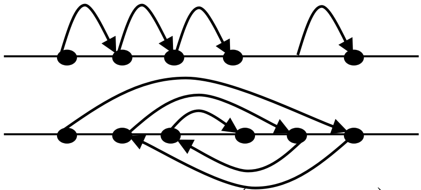


Рисунок 2 – Розташування x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ на прямій
(а – послідовне, для ітераційних процесів рис. 1а, 1в;
б – кругове, для ітераційних процесів рис. 1б, 1г)

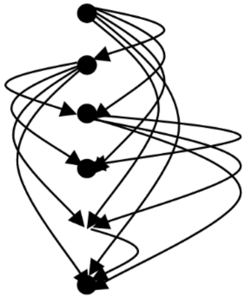
Введемо бінарне відношення порядку $\Re$ – розташування x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ на прямій:

$$\Re = \{ (x_i , x_j) : x_i < x_j , i = 0, 1, 2, \ldots, j = 0, 1, 2, \ldots \} \quad (2)$$

Проаналізуємо ітераційний процес, який представлено на рис. 2а. Бінарне відношення задане у вигляді списку, елементами якого є пари, які задовольняють умовам $x_i \; \Re \; x_j$:

$$\Re = \{ (x_0 , x_1), (x_0 , x_2), \ldots (x_0 , x_n), (x_1 , x_2), \ldots (x_{n-1} , x_n) \} \quad (3)$$

Бінарному відношенню (3) відповідає орієнтований граф та матриця відношення, зображена на рис. 3.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3 – Граф та матриця відношення рис. 2а

Побудоване бінарне відношення не є рефлексивним, антирефлексивне, не є симетричним, асиметричне, не є антисиметричним, транзитивне та не є антитранзитивним.

При знаходженні n-го ступеня відношення $\Re$ властивості зберігаються, матриця відношення перетворюється в матрицю тільки з одним одиничним елементом:

$$a_{0n}=1,\ a_{ij}=0\ (i=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n-1}),\ a_{in}=0\ (i=\overline{1,n}).$$

Проаналізуємо ітераційний процес, який представлений на рис. 2б. Бінарне відношення має вигляд:

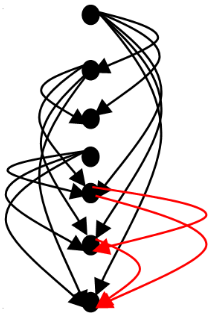
$$\Re=\{(x_0, x_1), (x_0, x_2), \ \ldots\ (x_0, x_n), (x_1, x_2), \ \ldots\ (x_{n-1}, x_n)\} \qquad (3)$$

Бінарному відношенню (3) відповідає орієнтований граф та матриця відношення (вершини графа на рис. 4 розташовані в порядку з‘явлення при розв‘язанні трансцендентного рівняння (1) методом простої ітерації).

При дослідженні n-го ступеня введеного бінарного відношення у вершинах, які відповідають непарній нумерації з‘явлення при роботі алгоритму, зникають зв‘язки і фактично отримуємо граф рис. 2.

Якщо розглядати граф як орієнтований, можна дослідити відповідні матриці інциндентності та суміжності.

Введення бінарного відношення порядку можна застосувати для аналізу неперервного відображення $f: I \to I$, де $I \subset R$ – деякий відрізок (рис. 5).



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Рисунок 4 – Граф та матриця відношення рисунка 2б

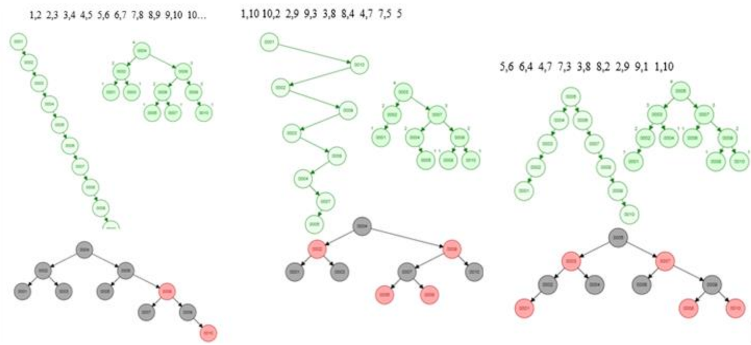


Рисунок 5 – Структури дерев пошуку

Висновки. Введене відношення між елементами показало варіанти зміни кількості схем пошуку розв’язків різницевого рівняння, але не дає відповіді на питання про існування розв‘язку та збіжність ітераційного процесу.

Побудовано найпростіше представлення ітераційного процесу при введенні бінарного відношення.

Побудовано послідовну та кругову схеми ітераційного процесу на прикладах бінарних дерев. Зокрема, результати роботи схем (1) ітераційного процесу на бінарних деревах пошуку, AVL-деревах та червоно-чорних деревах представлені на рис. 4.

Використання запропонованої модифікації методу може розширити область існування варіантів представлення ітераційної схеми обчислення розв‘язку диференціального рівняння першого порядку у графічному та матричному способах представлення бінарного відношення порядку.

Результати дослідження можуть бути використані при аналізі складної структури даних для відтворення різницевого рівняння через сформовані відношення порядку в термінах дискретної математики.

Бібліографічні посилання

1. Шарковский А. Н. Сосуществование циклов непрерывного отображения прямой в себя. *Украин. математ. журн*. 1964. Т. 16. Вып. 1. С. 61–71.
2. Старостина В. В., Тепляков В. В. Вокруг теоремы Шарковского. *Arctic Environmental Research. Серия «Естественные науки»*. 2013. URL: http://aer.narfu.ru/upload/iblock/9c3/97_104.pdf.

Надійшла до редколегії 25.11.2020.